2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Οι υπόριζες ποσότητες θεωρούνται ≥ 0 ή τις υποχρεώνουμε να είναι ≥ 0

2.
Ορισμός : $\sqrt[\nu]{\alpha}$ λέγεται ο μοναδικός μη αρνητικός αριθμός , ο οποίος όταν υψώνεται στη ν δίνει α .

3.
Άμεση συνέπεια του ορισμού
Ο αριθμός $\sqrt[\nu]{\alpha}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$,
αφού $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$
δηλαδή την επαληθεύει

4.
Προσοχή
$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$, αλλά $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$

5.
Ιδιότητες

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$$

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$$

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$$

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

Τα υπόριζα ≥ 0 και
οι παρανομαστές $\neq 0$

6.
Ορισμός
$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ όπου $\alpha > 0$ και $\mu,\ \nu \in \mathbb{N}^*$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Ρίζα εξίσωσης και ν-οστή ρίζα αριθμού

Πρέπει να διευκρινίσουμε ότι η λέξη « ρίζα » μόνη της δεν έχει κανένα νόημα στα μαθηματικά.

Χρησιμοποιείται, όμως, στον ορισμό δύο μαθηματικών εννοιών, ας πούμε ξένων μεταξύ τους.
i) Ρίζα (λύση) εξίσωσης
ii) Νιοστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού α , ή νιοστή ρίζα μη αρνητικής παράστασης.

2.

Υπόριζο ≥ 0

Όποτε γράφουμε $\sqrt[\nu]{\alpha}$, υποχρεώνουμε να είναι $\alpha \geq 0$

3.

Η ύπαρξη των αριθμών

Έχουμε την αίσθηση, ότι ο αριθμός $\sqrt{5}$ δεν είναι σαν τους αριθμούς 1, 2, $-\frac{3}{4}$

Γενικά νομίζουμε ότι, οι αριθμοί που παριστάνονται με ριζικά είναι « κακοί » - «ιδιότροποι» αριθμοί.

Παρ' όλα αυτά, πρέπει να δεχθούμε ότι, όσο υπάρχει ο αριθμός 4, άλλο τόσο υπάρχει και ο αριθμός $\sqrt{3}$.
Και οι δυο τους υπάρχουν μόνο στη φαντασία μας .

4.

Ρίζα και τετράγωνο φεύγει ;

Ρίζα και τετράγωνο δε φεύγει ούτε έρχεται.

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τους τύπους $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$, $(\sqrt[\nu]{\alpha}\,)^\nu = \alpha$

5.

Ένα εύκολο λάθος $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$

6.

Εισαγωγή θετικού αριθμού σε ριζικό

$\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\ \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$

7.

Εξαγωγή θετικού αριθμού από ριζικό

$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\sqrt[\nu]{\beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$

8.

Ρητοποίηση παρανομαστή

i) $\dfrac{x}{\sqrt{\alpha}} = \dfrac{x\sqrt{\alpha}}{\alpha}$ πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με $\sqrt{\alpha}$

ii) $\dfrac{x}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \dfrac{x(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})} = \dfrac{x(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση $\Pi = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

Λύση

Πρέπει $x - 1 \geq 0$ και $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow$

$x \geq 1$ και $3 \geq x$

$x \geq 1$ και $x \leq 3$

$1 \leq x \leq 3$

2.

Για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση $\Pi = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$

Λύση

Πρέπει $x^2 - 1 \geq 0$ και $x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$x^2 \geq 1$

$|x| \geq 1$

$x \leq -1$ ή $x \geq 1$

3.

Για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση $\Pi = \dfrac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+3}}$

Λύση

Πρέπει $x + 1 \geq 0$ και $x + 3 > 0$ $\Leftrightarrow$

$x \geq -1$ και $x > -3$

$x \geq -1$

4.

Να εκφράσετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά.

i) $\sqrt{x^2}$, **ii)** $\sqrt{(x-1)^2}$, **iii)** $\sqrt{x^2+2x+1}$

iv) $\sqrt[3]{x^3}$, **v)** $\sqrt[3]{(x+1)^3}$

Λύση

Σχόλιο 4

i) $\sqrt{x^2} = |x|$

ii) $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

iii) $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

iv) Πρέπει $x^3 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x \geq 0$

Οπότε $\sqrt[3]{x^3} = |x| = x$

v) Πρέπει $(x+1)^3 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x + 1 \geq 0$

Οπότε $\sqrt[3]{(x+1)^3} = |x+1| = x + 1$

5.

Να γίνουν οι πράξεις **i)** $\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + \sqrt{48}$

ii) $\sqrt{5} - \sqrt{20} + \dfrac{1}{\sqrt{45}}$

Λύση

Αναλύουμε τα υπόριζα σε πρώτους παράγοντες

i) $\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + \sqrt{48} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3^2\cdot 3} + \sqrt{4^2\cdot 3}$

$= \sqrt{3} - 2\cdot 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

$= \sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}\,(1 - 6 + 4) = \sqrt{3}\,(-1) = -\sqrt{3}$

ii) $\sqrt{5} - \sqrt{20} + \dfrac{1}{\sqrt{45}} = \sqrt{5} - \sqrt{2^2\cdot 5} + \dfrac{1}{\sqrt{3^2\cdot 5}}$

$= \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$

$= \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{5}}{3\cdot 5}$

$= \sqrt{5}\left(1 - 2 + \dfrac{1}{15}\right)$

$= \sqrt{5}\left(-1 + \dfrac{1}{15}\right) = \sqrt{5}\left(-\dfrac{14}{15}\right) = -\dfrac{14\sqrt{5}}{15}$

6.

Να γίνουν οι πράξεις **i)** $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$ όπου $x, y > 0$

ii) $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 2\sqrt{y} - 1)$ όπου $x, y > 0$

Λύση

i) $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2 = x - 4y$

ii) $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 2\sqrt{y} - 1) = [\sqrt{x} + (2\sqrt{y} + 1)]\,[\sqrt{x} - (2\sqrt{y} + 1)]$

$= (\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y} + 1)^2$

$= x - (4y + 4\sqrt{y} + 1)$

$= x - 4y - 4\sqrt{y} - 1$

7.

Να γίνουν οι πράξεις $\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2$, όπου $x>2$

Λύση

$\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2 =$

$x + 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\ \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + x - 2\sqrt{x-1} =$

$2x + 2\sqrt{(x+2\sqrt{x-1})(x-2\sqrt{x-1})} =$

$2x + 2\sqrt{x^2-4(x-1)} =$

$2x + 2\sqrt{x^2-4x+4} =$

$2x + 2\sqrt{(x-2)^2} =$

$2x + 2|x-2| = 2x + 2(x-2) = 2x + 2x - 4 = 4x - 4$

8.

Να γίνουν οι πράξεις $\sqrt{x-2\sqrt{xy}+y} + \sqrt{x+2\sqrt{xy}+y}$, όπου $x>y>0$

Λύση

$\sqrt{x-2\sqrt{xy}+y} + \sqrt{x+2\sqrt{xy}+y} =$

$\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2} =$

$\sqrt{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2} =$

$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| + \left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right| =$

$\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{x}$

9.

Να γίνουν οι πράξεις $\sqrt{7+4\sqrt{3}}\ +\ \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

Λύση

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}\ +\ \sqrt{7-4\sqrt{3}}\ =\ \sqrt{4+4\sqrt{3}+3}\ +\ \sqrt{4-4\sqrt{3}+3}$$

$$=\ \sqrt{2^2+4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}\ +\ \sqrt{2^2-4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\ \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\ +\ \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\ \left|2+\sqrt{3}\right|\ +\ \left|2-\sqrt{3}\right|$$

$$=\ 2+\ \sqrt{3}+2-\sqrt{3}\ =\ 4$$

10.

Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ \le\ \sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$, όπου $\alpha,\ \beta>0$

Λύση

Στις τετρ. ρίζες η ύψωση στο τετράγωνο είναι μέθοδος

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\ \le\ \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\quad\Leftrightarrow\quad\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\le\left(\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\right)^2$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\ \le\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

$$(\alpha+\beta)^2\ \le\ 2(\alpha^2+\beta^2)$$

$$\alpha^2+2\alpha\beta\ +\ \beta^2\ \le\ 2\alpha^2+2\beta^2$$

$$0\ \le\ \alpha^2-2\alpha\beta\ +\ \beta^2$$

$0\ \le\ (\alpha-\beta)^2$ που ισχύει .

11.

Να αποδειχθεί ότι $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, όπου $x > 0$

Λύση

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\,\sqrt{x+1} - 2x < 1$$

$$2\sqrt{x}\,\sqrt{x+1} < 2x + 1$$

$$(2\sqrt{x}\,\sqrt{x+1}\,)^2 < (2x + 1)^2$$

$$4x(x + 1) < 4x^2 + 4x + 1$$

$$4x^2 + 4x < 4x^2 + 4x + 1$$

$0 < 1$ που ισχύει